Tema 2:
Sucesiones y series.
(primera parte)

Estructura del Tema 2 (primera parte):

- Sucesión numérica: Definición y preliminares.
- Sucesiones convergentes.
- Sucesiones monótonas.

Una **sucesión numérica** es una "regla" que asigna a cada número $n \in \mathbb{N}$ un número $a_n \in \mathbb{R}$: $n \rightsquigarrow a_n$.

Sucesión numérica: Definición.

Una **sucesión numérica** es una "regla" que asigna a cada número $n \in \mathbb{N}$ un número $a_n \in \mathbb{R}$: $n \rightsquigarrow a_n$.

Las sucesiones se pueden escribir:

- *Término a término:* $\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right\}$.

Una **sucesión numérica** es una "regla" que asigna a cada número $n \in \mathbb{N}$ un número $a_n \in \mathbb{R}$: $n \rightsquigarrow a_n$.

Las sucesiones se pueden escribir:

- *Término a término:* $\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right\}$.
- *Término general:* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Una **sucesión numérica** es una "regla" que asigna a cada número $n \in \mathbb{N}$ un número $a_n \in \mathbb{R}$: $n \rightsquigarrow a_n$.

Las sucesiones se pueden escribir:

- *Término a término:* $\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right\}$.
- *Término general:* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.
- *Ley de recurrencia:* $a_{n+1} = F(a_n)$, $\quad a_{n+1} = \dfrac{1}{\frac{1}{a_n} + 1}$.

Una **sucesión numérica** es una "regla" que asigna a cada número $n \in \mathbb{N}$ un número $a_n \in \mathbb{R}$: $n \rightsquigarrow a_n$.

Las sucesiones se pueden escribir:

- *Término a término:* $\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right\}$.
- *Término general:* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.
- *Ley de recurrencia:* $a_{n+1} = F(a_n), \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{a_n} + 1}$.

Notación: Escribiremos $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ o $\{a_n\}$

Convergencia de sucesiones: $\lim_{n\to\infty} a_n$.

¿Cuándo existe $\lim_{n\to\infty} a_n$*?*

¿Cuándo existe $\lim_{n\to\infty} a_n$*?*

Ejemplo 2.1 (Ejerc.2(1-3-7)-Hoja 3): Observar el comportamiento de las siguientes sucesiones a medida que "n crece":

(1) $\left\{\frac{n^2}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

(3) $\left\{\frac{n}{n^2-n-4}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

(7) $\left\{\frac{(-1)^n n^2}{n^2+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

¿Están acotadas? ¿se acercan a un número fijo ?

Una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es **convergente** si existe $\ell \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$$

e.d., si $\forall\, \varepsilon > 0$ existe un $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - \ell| < \varepsilon, \quad \forall\, n \geq N_0$.

Ejemplo 2.1 (cont.):

$$(3) \quad \left\{ \frac{n}{n^2 - n - 4} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

Una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es **convergente** si existe $\ell \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$$

e.d., si $\forall\, \varepsilon > 0$ existe un $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - \ell| < \varepsilon, \quad \forall\, n \geq N_0$.

Ejemplo 2.1 (cont.):

$$(3) \quad \left\{ \frac{n}{n^2 - n - 4} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

Una sucesión es **divergente** (**no convergente**) si no existe el límite (la sucesión es *oscilante* sin acercarse a ningún valor) o el límite $\ell = \pm\infty$.

Ejemplo 2.1 (cont.):

$$(1) \quad \left\{ \frac{n^2}{n+2} \right\}_{n=1}^{\infty} \qquad \text{o} \qquad (7) \quad \left\{ \frac{(-1)^n n^2}{n^2+2} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

Proposición: Si una sucesión tiene límite, este *es único*.

Proposición: Si una sucesión tiene límite, este *es único*.

Obs.) Esta proposición es útil cuando queremos demostrar que *no existe* el límite de una sucesión.

Ejemplo 2.1 (cont.): (7) $\left\{ \frac{(-1)^n n^2}{n^2+2} \right\}_{n=1}^{\infty}$

Proposición: Si una sucesión tiene límite, este *es único*.

Obs.) Esta proposición es útil cuando queremos demostrar que *no existe* el límite de una sucesión.

Ejemplo 2.1 (cont.): (7) $\left\{\frac{(-1)^n n^2}{n^2+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$

Propiedades de los límites: Si $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = m$

- $\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n \pm \mu b_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} a_n \pm \mu \lim_{n\to\infty} b_n = \lambda l \pm \mu m$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = l \cdot m$
- Si $m \neq 0$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{l}{m}$$

- Si f es una función continua, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = f(l).$$

Cálculo del límite de una sucesión a_n

Para calcular límites de sucesiones utilizaremos además alguna de las siguientes técnicas:

- Lema del sandwich.
- Criterio de Stolz.
- Concepto de límites de funciones y cálculo diferencial.
- Sucesiones monótonas y acotadas.

Lema del sandwich:

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \ell$ y existe un $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N_0$ se tiene que $a_n \leq b_n \leq c_n$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \ell$$

Lema del sandwich:

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \ell$ y existe un $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N_0$ se tiene que $a_n \leq b_n \leq c_n$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \ell$$

Obs.) El lema es útil cuando involucra sucesiones acotadas.

Ejemplo 2.2 (Ejerc.2(8)-Hoja 3): $\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{n+(-1)^n}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$.

Lema del sandwich:

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \ell$ y existe un $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N_0$ se tiene que $a_n \leq b_n \leq c_n$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \ell$$

Obs.) El lema es útil cuando involucra sucesiones acotadas.

Ejemplo 2.2 (Ejerc.2(8)-Hoja 3): $\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{n+(-1)^n}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$.

$$\frac{n-1}{n} \leq \frac{n+(-1)^n}{n} \leq \frac{n+1}{n}$$

Lema del sandwich:

Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \ell$ y existe un $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N_0$ se tiene que $a_n \leq b_n \leq c_n$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \ell$$

Obs.) El lema es útil cuando involucra sucesiones acotadas.

Ejemplo 2.2 (Ejerc.2(8)-Hoja 3): $\lim_{n\to\infty} \left\{\frac{n+(-1)^n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

$$\frac{n-1}{n} \leq \frac{n+(-1)^n}{n} \leq \frac{n+1}{n}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1\,.$$

Lema del sandwich:

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \ell$ y existe un $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N_0$ se tiene que $a_n \leq b_n \leq c_n$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \ell$$

Obs.) El lema es útil cuando involucra sucesiones acotadas.

Ejemplo 2.2 (Ejerc.2(8)-Hoja 3): $\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{n+(-1)^n}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$.

$$\frac{n-1}{n} \leq \frac{n+(-1)^n}{n} \leq \frac{n+1}{n}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1\,.$$

Por tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+(-1)^n}{n} = 1$$

Criterio de Stolz (Versión discreta de L'Hôpital):

Dado $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$, si se verifica alguna de las dos propiedades:

- $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ y creciente, o
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ y decrecientes,

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

Criterio de Stolz (Versión discreta de L'Hôpital):

Dado $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$, si se verifica alguna de las dos propiedades:

- $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ y creciente, o
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ y decrecientes,

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

Obs.) El criterio es útil cuando aparezcan sumas cuyo número de sumandos depende de n.

Ej. 2.3 (Ej.2(15)-Hoja 3): $\lim_{n\to\infty} \left\{\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} +\right\}_{n=1}^{\infty}$

Criterio de Stolz (Versión discreta de L'Hôpital):

Dado $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$, si se verifica alguna de las dos propiedades:

- $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ y creciente, o
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ y decrecientes,

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

Obs.) El criterio es útil cuando aparezcan sumas cuyo número de sumandos depende de n.

Ej. 2.3 (Ej.2(15)-Hoja 3): $\lim_{n\to\infty} \left\{\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} + \right\}_{n=1}^{\infty}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\cdots+(n+1)) - (1+\cdots+n)}{(n+1)^2 - n^2}$$

Criterio de Stolz (Versión discreta de L'Hôpital):

Dado $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$, si se verifica alguna de las dos propiedades:

- $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ y creciente, o
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ y decrecientes,

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$$

Obs.) El criterio es útil cuando aparezcan sumas cuyo número de sumandos depende de n.

Ej. 2.3 (Ej.2(15)-Hoja 3): $\lim_{n\to\infty} \left\{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}+\right\}_{n=1}^{\infty}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\cdots+(n+1))-(1+\cdots+n)}{(n+1)^2-n^2}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

Concepto de límites de funciones y cálculo diferencial:

- Si $a_n = f(n)$, donde f es una función definida en todos los reales (o al menos en los positivos), entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to\infty} f(x)$$

Para calcularlo se pueden utilizar las técnicas del cálculo diferencial, como la regla de L'Hôpital o el Teorema de Taylor.

Ejemplo 2.4: $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \big(\cos(3/n)\big)^{n^2}.$

Concepto de límites de funciones y cálculo diferencial:

- Si $a_n = f(n)$, donde f es una función definida en todos los reales (o al menos en los positivos), entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to\infty} f(x)$$

Para calcularlo se pueden utilizar las técnicas del cálculo diferencial, como la regla de L'Hôpital o el Teorema de Taylor.

Ejemplo 2.4: $\lim_{n\to\infty} \big(\cos(3/n)\big)^{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty} \big(\cos(3/n)\big)^{n^2} = \lim_{x\to 0} \big(\cos(3x)\big)^{1/x^2} = e^{-9/2}$$

Sucesiones monótonas y acotadas:

- Una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es **monótona creciente** si $a_{n+1} \geq a_n$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Análogamente para **monótona decreciente**.

Sucesiones monótonas y acotadas:

- Una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es **monótona creciente** si $a_{n+1} \geq a_n$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Análogamente para **monótona decreciente**.
- Una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es **acotada superiormente** si $a_n \leq C$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Análogamente para **acotada inferiormente**.

Sucesiones monótonas y acotadas:

- Una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es **monótona creciente** si $a_{n+1} \geq a_n$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Análogamente para **monótona decreciente**.
- Una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es **acotada superiormente** si $a_n \leq C$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Análogamente para **acotada inferiormente**.

Teorema:

- Toda sucesión monótona creciente y acotada superiormente es convergente.
- Toda sucesión monótona decreciente y acotada inferiormente es convergente.

Sucesiones monótonas y acotadas:

- Una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es **monótona creciente** si $a_{n+1} \geq a_n$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Análogamente para **monótona decreciente**.
- Una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es **acotada superiormente** si $a_n \leq C$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Análogamente para **acotada inferiormente**.

Teorema:

- Toda sucesión monótona creciente y acotada superiormente es convergente.
- Toda sucesión monótona decreciente y acotada inferiormente es convergente.

Obs.) Este método es útil en sucesiones dadas por recurrencia.

Proposición: Sea $\{a_n\} \in \mathbb{R}$ una sucesión que converge a $\ell \in \mathbb{R}$ tal que $a_{n+1} = F(a_n)$, entonces:

$$\ell = F(\ell)$$

e.d., los límites de la sucesión son los *puntos fijos* de la recurrencia.

Ejemplo 2.5 (Ejerc.7-Hoja 3): Sea $a > 1$. Se define por recurrencia la sucesión $\{a_n\}$ por la relación $a_n = \sqrt{a \cdot a_{n-1}}$, $a_1 = \sqrt{a}$. Probar que la sucesión es monótona creciente y acotada. Hallar su límite.